LCE0160 Fundamentos de Matemática

Roseli Aparecida Leandro

Março de 2009

Depto. de Ciências Exatas, ESALQ/USP
e-mail: raleandr@esalq.usp.br

Limites infinitos

Definição 1

Seja f uma função definida em um intervalo aberto contendo a, exceto possivelmente no próprio a. Dizemos que:

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

Se para qualquer $N > 0$ existir um $\delta > 0$ tal que $f(x) > N$ sempre que $0 < |\, x - a \,| < \delta$

Definição 2

Seja f uma função definida em um intervalo aberto contendo a, exceto possivelmente no próprio a. Dizemos que:

$$\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = -\infty$$

Se para qualquer $N < 0$ existir um $\delta > 0$ tal que $f(x) < N$ sempre que $0 <\mid x - a \mid< \delta$

Observações:

i. Definições semelhantes podem ser feitas ao trocarmos "$x \to a$" por: "$x \to a^-$" ou "$x \to a^+$"

2. Limites infinitos no infinito podem ser considerados. Existem definições formais para cada um dos seguintes limites:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

P1: Propriedades 1

Se $\lim_{x\to a} f(x) =^{+}_{-} \infty$ e $\lim_{x\to a} g(x) = c$, c uma constante qualquer, então:

i. $\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] =^{+}_{-} \infty$

ii. Se $c > 0$, $\lim_{x\to a}[f(x)g(x)] =^{+}_{-} \infty$

iii. Se $c < 0$, $\lim_{x\to a}[f(x)g(x)] =^{-}_{+} \infty$

iv. $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$

P2: Propriedades 2

Se $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to a} g(x) = c$, c uma constante qualquer, então:

i. Se $c > 0$ e se $f(x) \to 0$ através de valores positivos de $f(x)$, $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

ii. Se $c > 0$ e se $f(x) \to 0$ através de valores negativos de $f(x)$, $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = -\infty$

iii. Se $c < 0$ e se $f(x) \to 0$ através de valores positivos de $f(x)$, $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = -\infty$

iv. Se $c < 0$ e se $f(x) \to 0$ através de valores negativos de $f(x)$, $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

Observações:

As propriedades P1 e P2 continuam válidas se "$x \to a$" for substituído por "$x \to a^-$" ou "$x \to a^+$" "$x \to +\infty$" ou "$x \to -\infty$"

Assíntotas horizontais e verticais

Definição de assíntotas horizontais

Diz-se que a reta horizontal $y = b$ é uma assíntota horizontal do gráfico de uma função f se pelo menos uma das afirmações seguintes for verdadeira:

i. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$

ii. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$

Assíntotas horizontais e verticais

Definição assíntotas vertical

Diz-se que a reta vertical $x = a$ é uma assíntota vertical do gráfico de uma função f se pelo menos uma das afirmações seguintes for verdadeira:

i. $\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$

ii. $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

iii. $\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$

iv. $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$

Teoremas adicionais sobre limites de funções

Teorema 1 (Teorema da conservação do sinal)

Se $\lim_{x\to a} f(x)$ existe e $\lim_{x\to a} f(x) = b \neq 0$, então existe um intervalo aberto contendo a tal que $f(x)$ tem o mesmo sinal de b para todo $x \neq a$ deste intervalo.

Teorema 2 (Teorema da comparação)

Suponhamos que f e g estejam definidas em um intervalo aberto I contendo a, exceto possivelmente em a. Suponhamos, também, que $f(x) \leq g(x) \forall x \in I, x \neq a$. Então, se existirem $\lim_{x \to a} f(x)$ e $\lim_{x \to a} g(x)$,

$$\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x).$$

Observações:

i. Se $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ e $f(x) \leq g(x)$, então $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$

(vale para "$x \to a$", "$x \to +\infty$" e "$x \to -\infty$")

ii. Se $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$ e $f(x) \leq g(x)$, então $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$

(vale para "$x \to a$", "$x \to +\infty$" e "$x \to -\infty$"

Teorema 3

(Teorema do confronto ou do "Sanduíche")

Se $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para todo x em um intervalo aberto contendo a, exceto possivelmente em a, e se $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$ então

$$\lim_{x \to a} g(x) = L.$$

Observações:

O teorema continua válido se "$x \to a$" for substituído por "$x \to +\infty$" ou "$x \to -\infty$"

Limites Fundamentais

Primeiro limite fundamental

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x} = 1$$

Segundo limite fundamental

$$\lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} = e, e = 2,71828$$

equivalentemente,

$$\lim_{x \to 0} \left(1 + x)^{\frac{1}{x}}\right)^{x} = e, e = 2,71828$$

Terceiro limite fundamental

Mostre que,

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln(a)$$