LCE0160 Fundamentos de Matemática

Roseli Aparecida Leandro

Março de 2009

Depto. de Ciências Exatas, ESALQ/USP
e-mail: raleandr@esalq.usp.br

Limites no infinito

Considere a função f definida por

$$f(x) = \frac{2x^2}{x^2 + 1}$$

Vejamos o comportamento de $f(x)$ quando x tende ao infinito, ou seja, $x \to \infty$.

x	$f(x)$
0	0,000000
1	1,000000
2	1,600000
3	1,800000
4	1,882353
5	1,923077
10	1,980198
100	1,999800
1000	1,999998

O que pode ser observado? Observa-se que os valores de $f(x)$ tendem a se aproximar cada vez mais do número 2.

Esse comportamento pode ser descrito matematicamente por :

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 2 \text{ ou } \lim_{x \to \infty} \frac{2x^2}{x^2+1} = 2$$

ou ainda, equivalentemente,

Dado $\epsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que $| f(x) - L | < \epsilon$ sempre que $x > N$.

Observe que, neste caso, $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2+1}$ e $L = 2$.

Definição

Seja f uma função definida em todo número de um intervalo aberto $(0, \infty)$. O limite de $f(x)$ quando x cresce ilimitadamente, é L, que pode ser transcrito como

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 2$$

se para qualquer $\epsilon > 0$, ainda que pequeno, existir um número $N > 0$ tal que

$$| f(x) - L | < \epsilon \text{ sempre que } x > N.$$

Limite no infinito será muito importante para o estudo do crescimento de população. Em muitas aplicações, que vão da medicina à ecologia e a macroeconomia, é desejável prever o crescimento, ou o declínio, futuro da população de uma dada espécie. Em diferentes situações é possível que estejamos interessados na população de bactérias, de insetos, de mamíferos e até mesmo de seres humanos.

Veja alguns exemplos de modelo de crescimento:

1. O crescimento de uma população segundo o modelo Malthusiano é descrito pela seguinte equação:

$$P(t) = P(0)e^{\alpha t}$$

2. O crescimento de uma população segundo o modelo Verhulstiano é dado seguinte equação:

   O modelo de Verhulst supõe que a população de uma certa espécie, vivendo num determinando meio,atinge um limite máximo sustentável dado por:

$$P_\infty = lim_{t \to \infty} P(t). \tag{1}$$

   supondo $P(0) = P_0$, o tamanho da população em $t = 0$ teremos:

$$P(t) = \frac{aP_0}{P_0 + (a - P_0)e^{-art}}$$