Medição e propagação de erros

1 – Sistema de unidades padrão

Para facilitar o comércio internacional, diversos países criaram padrões comuns para medir grandezas através de um acordo internacional.

A 14ª Conferência Geral sobre Pesos e Medidas (1971) elegeu as *sete grandezas físicas fundamentais*, que constituem a base do Sistema Internacional de Unidades (SI): comprimento, massa, tempo, intensidade de corrente elétrica, temperatura, quantidade de matéria e intensidade luminosa**.**

- *metro* [*m*]: unidade de comprimento. É o comprimento do trajeto percorrido pela luz no vácuo durante um intervalo de tempo de 1/299.792.458 de segundo.

- *quilograma* [*kg*]: unidade de massa. É a massa do protótipo internacional do quilograma existente no Instituto Internacional de Pesos e Medidas em Sévres, na França.

- *segundo* [*s*]: unidade de tempo. É a duração de 9.192.631.770 períodos da radiação correspondente à transição entre dois níveis hiperfinos do estado fundamental do átomo de césio-133.

- *ampére* [*A*]: unidade de corrente elétrica. É a intensidade de uma corrente elétrica constante que, mantida em dois condutores paralelos, retilíneos, de comprimento infinito, de secção circular desprezível e situados à distância de um metro entre si, no vácuo, produz entre esses dois condutores uma força igual a $2\text{x}10^{-7}$ newton por metro de comprimento.

- *kelvin* [*K*]: unidade de temperatura termodinâmica. É a fração 1/273,16 da temperatura termodinâmica do ponto tríplice da água.

- *mol* [*mol*]: unidade de quantidade de matéria. É a quantidade de matéria de um sistema contendo tantas entidades elementares quantos átomos existem em 0,012 quilogramas de carbono-12.

- *candela* [*cd*]: unidade de intensidade luminosa. É a intensidade luminosa, numa dada direção de uma fonte que emite uma radiação monocromática de freqüência $540\text{x}10^{12}$ hertz (1 hertz = 1 /segundo) e cuja intensidade energética nessa direção é de 1/683 watts (1 Watt = 1 Joule /segundo) por esferoradiano.

2 – Medições

É conveniente definir o significado dos termos *medição*, *medida(s)*, *dados experimentais* e *resultados experimentais*.

- *Medição* é o ato ou efeito de medir
- *Medida* é o termo usado para se referir ao valor numérico (e unidade padrão) resultante de uma dada medição
- *Dados experimentais* são os valores obtidos nas medições diretas
- *Resultados Experimentais* são, geralmente, os valores obtidos após serem realizados cálculos com os dados experimentais.

Os *resultados experimentais* podem ser obtidos de duas maneiras: através de *medições diretas* ou de *medições indiretas*.

3 – Incertezas de uma medida

Um dos princípios básicos da física diz: “Não se pode medir uma grandeza física com precisão absoluta”, ou seja, “qualquer medição, por mais bem feita que seja, é sempre aproximada”.

De acordo com o princípio descrito no parágrafo anterior, o valor medido nunca representa o *valor verdadeiro* da grandeza, pois este nunca é conhecido com total certeza. Quando este resultado (número e unidade) vai ser aplicado ou registrado é necessário saber com que *confiança* se pode dizer que o número obtido representa a grandeza física. O valor medido ou o resultado deve ser expresso com a *incerteza da medida*, utilizando uma representação em uma linguagem universal, fazendo com que seja compreensível a outras pessoas.

Chama-se *valor verdadeiro* ou *valor do mensurando* ao valor que seria obtido se a medição da grandeza fosse feita de maneira perfeita e com instrumentos perfeitos.

Por isso, deve-se necessariamente associar um *erro* ou *desvio* ao valor de qualquer medida.

É importante salientar que a palavra *erro* não tem, aqui, o significado de distração, descuido ou engano, pois estes podem ser evitados, enquanto o *erro experimental* não pode ser evitado, mesmo nas medições mais precisas.

4 – Algarismos significativos

Ao expressar uma medida é necessário saber expressar o número de algarismos com que se pode escrever tal medida, a unidade e o grau de confiança do valor expresso, ou seja, é necessário incluir uma *primeira estimativa de incerteza*. O erro de uma medida é classificado como incerteza do tipo *A* ou incerteza do tipo *B*. A incerteza obtida a partir de várias medições é chamada de *incerteza padrão do tipo A*, que é o desvio padrão determinado por métodos estatísticos. A incerteza estimada em uma única medição é classificada como *incerteza padrão tipo B*, que é a incerteza obtida por qualquer método que não seja estatístico.

Um exemplo da incerteza do tipo B é apresentado na Figura 1, medida obtida com uma única medição do comprimento *S* de um lápis, utilizando uma régua com menor divisão em mm.

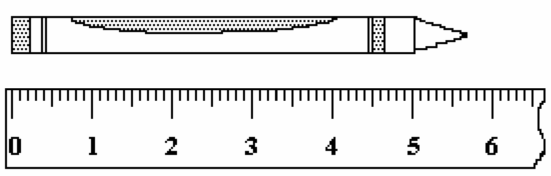

Figura 1 - Medição do comprimento de um lápis utilizando uma régua com escala de 1 mm.

A incerteza pode ser estimada como sendo a *metade da menor divisão da escala* do equipamento utilizado. A estimativa da incerteza é uma avaliação visual, podendo ser considerada uma fração da menor divisão da escala, feita mentalmente por quem realiza a medição.

A medida do comprimento do lápis, obtida na Figura 2 é:

$$S = 5{,}75 \pm 0{,}05\ cm$$

O resultado é apresentado com três algarismos significativos. A incerteza ou erro na medida é representado pelo termo 0,05 cm ou 0,5 mm, que é a metade da menor divisão da escala do equipamento. Este procedimento só pode ser adotado quando houver segurança de quem realiza a medição, ao avaliar visualmente uma casa decimal a mais que a descrita na escala do equipamento. Caso contrário a incerteza deve ser considerada a menor divisão da escala do equipamento.

Os algarismos significativos do comprimento do lápis são representados por algarismos corretos e pelo primeiro algarismo duvidoso, de acordo com a descrição abaixo:

algarismos significativos	=	algarismos corretos	+	primeiro algarismo duvidoso
↓		↓		↓
5,75		**5,7**5		5,7**5**

5 – Operações aritméticas

Medidas devem ser escritas com o número correto de algarismos significativos, omitindo todos os algarismos sobre os quais não se tem informação. Ao efetuar alguma operação com tais números, não se deve escrever algarismos sem significado. A seguir são apresentados exemplos e regras simples para operações aritméticas com números que representem medidas.

A adição ou subtração de números que possuem algarismos significativos é feita com o alinhamento das casas decimais, sendo completados com zero, da mesma forma que em uma operação aritmética de soma e subtração convencional. Ao final da operação, o número de algarismos significativos do resultado é o mesmo do elemento somado com menor precisão. Consideremos como exemplo a adição dos seguintes valores de comprimento: 83mm + 83,4mm + 83,52mm. Os valores são organizados da seguinte maneira:

83	mm
83,4	mm
83,52	mm
______	
249,92	mm

O resultado desta operação é 250 mm.

A multiplicação ou divisão de números com algarismos significativos também deve ser feita como na forma. No resultado final o número de algarismos

Medição e propagação de erros

significativos do produto ou da divisão de dois ou mais números (medidas) deve ser igual ao número de algarismos significativos do fator menos preciso.

Consideremos como exemplo, a multiplicação dos valores dos comprimentos 83,4 mm e 83 mm. A operação é escrita como:

```
 83,4   mm
 x 83   mm
02 5 0 2
6 6 7 2
6 9 2 2,2
```

O resultado da operação é 69 x 10 ^{2} mm^{2} ou ainda 6,9x10^{3} mm^{2}.

6 – Regras de arredondamento

O arredondamento dos números é feito de acordo com as seguintes regras:

- Os algarismos 1,2,3,4 são arredondados para baixo, isto é, o algarismo precedente é mantido inalterado. Por exemplo: 3,14 e 2,73 são arredondados para 3,1 e 2,7 respectivamente.
- Os algarismos 6,7,8,9 são arredondados para cima, isto é, o algarismo precedente é aumentado de 1. Por exemplo: 3,16 e 2,78 são arredondados para 3,2 e 2,8 respectivamente.
  Para o algarismo 5 é utilizada a seguinte regra: 5 é arredondado para baixo sempre que o algarismo precedente for par e, é arredondado para cima sempre que o algarismo precedente for impar. Por exemplo: 4,65 e 4,75 são arredondados para 4,6 e 4,8 respectivamente.

7 – Erros ou desvios

Os erros podem ser classificados em dois grandes grupos: *erros sistemáticos* ou erros *aleatórios*.

Os *erros sistemáticos* são aqueles que resultam das discrepâncias observacionais persistentes, tais como erros de paralaxe. Os erros sistemáticos ocorrem principalmente em experimentos que estão sujeitos a mudanças de temperatura, pressão e umidade. Estas mudanças estão relacionadas a condições ambientais. Os *erros sistemáticos* podem e devem ser eliminados ou minimizados pelo experimentador. Isso pode ser feito, observando se os instrumentos estão corretamente ajustados e calibrados, e ainda se estão sendo usados de forma correta na interligação com outros instrumentos, na montagem experimental.

Existe um limite abaixo do qual não é possível reduzir o erro sistemático de uma medição. Um destes erros é o de calibração, diretamente associado ao instrumento com o qual se faz a medição. Este tipo de erro é também chamado *erro sistemático residual*. Geralmente, o erro de calibração (residual) vem indicado no instrumento ou manual, pelo fabricante; é o limite dentro do qual o fabricante garante os erros do instrumento.

Os *erros aleatórios* (ou estatísticos) são aqueles que ainda existem mesmo quando todas as discrepâncias sistemáticas num processo de mensuração são minimizadas, balanceadas ou corrigidas. Os *erros aleatórios* jamais podem ser eliminados por completo.

6 – Desvio padrão amostral e populacional

Define-se ***desvio padrão amostral*** ou ***desvio médio quadrático***, a raiz quadrada da variância amostral, descrita pela relação:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}{N-1}} \qquad (1)$$

O valor de s fornece uma idéia sobre a **incerteza padrão** (**incerteza típica**) de qualquer medida, tendo como base o conjunto das N medidas. O parâmetro s pode ser interpretado como sendo a incerteza que se pode esperar, dentro de certa probabilidade, se uma *(N+1)-ésima* medição viesse a ser realizada, quando já se conhece o que ocorreu nas N medições anteriores. O desvio padrão amostral indica uma boa avaliação sobre a distribuição das medidas, em torno do valor médio.

Considerando um conjunto de dados experimentais, são apresentados na Tabela I, alguns parâmetros estatísticos como: o seu valor médio, o seu desvio experimental médio, o seu desvio absoluto médio e o seu desvio quadrático médio.

Medição e propagação de erros

Tabela I - Parâmetros estatísticos de um conjunto de dados obtidos com a medição da massa de um cilindro metálico, utilizando uma balança de braço.

Parâmetro	Definição	Resultado
Valor médio	$\bar{x} = \frac{1}{200}\sum_{i=1}^{200} x_i$	$\bar{x} = 43{,}56\overline{0}050\ g$
Desvio absoluto	$\bar{d}_{abs} = \frac{1}{200}\sum_{i=1}^{200} \lvert x_i - \bar{x} \rvert$	$\bar{d}_{abs} = 0{,}01\overline{1}364\ g$
Desvio relativo	$\bar{d}_{rel} = \frac{\bar{d}_{abs}}{\bar{x}}$	$\bar{d}_{rel} = 0{,}00\overline{0}261$
Desvio percentual	$\bar{d}_{\%} = 100\bar{d}_{rel}$	$\bar{d}_{\%} = 0{,}02\overline{6}088\,\%$
Desvio padrão	$s = \sqrt{\frac{1}{200-1}\sum_{i=1}^{200}(x_i - \bar{x})^2}$	$s = 0{,}01\overline{5}021\,g$

A partir dos resultados apresentados na Tabela I, supõe-se que as medidas foram realizadas com muito cuidado pois o desvio percentual tem um valor muito abaixo de 1%. Os resultados foram tratados com 2 dígitos depois da vírgula, mas a balança permitia a obtenção dos valores até o primeiro dígito. Esta aparente irregularidade resulta do fato de que o segundo dígito foi obtido através da inferência nas medidas. O resultado numérico só pode ser escrito até o terceiro dígito depois da vírgula, devido às regras sobre algarismos significativos.

Na expressão (2), é apresentada a definição do desvio padrão da $\bar{x}$.

$$\sigma_m \cong \sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}{N(N-1)}} \qquad (1)$$

Esta expressão é a que apresenta maior interesse, pois ela indica a maior ou menor incerteza da média $\bar{x}$ em relação a uma média mais geral, que seria a média de diversas médias. Uma média mais geral seria a média de K conjuntos, cada um com M medidas. Obviamente,

$$\sigma_{\bar{x}} < \sigma$$

Assim, o resultado de uma série de N medições pode ser escrita como:

$$x = \bar{x} \pm \sigma_{\bar{x}} \qquad (3\text{-}47)$$

A cada valor medido isolado adicionado aos N valores previamente utilizados, modifica o valor médio $\bar{x}$ resultante. Porém, $\sigma_{\bar{x}}$ será tanto menor quanto maior o número N, ou quanto maior o número K, de conjuntos com N medidas. Com isto, oscilações irregulares (δx_j),são cada vez menores, fazendo com que o valor médio se aproxime assintoticamente de um valor final quando $N \rightarrow \infty$. Um número de medições excessivo não compensa o tempo gasto, pois, ao invés de se repetir mais e mais vezes as medições, é preferível uma realização cuidadosa de uma série, de umas 10 medições, para assegurar a qualidade do resultado**.** De acordo com a teoria de erros, se forem realizadas N medições, o desvio (σ) diminuirá para $1/\sqrt{N}$ do valor inicial. Portanto, pode ser utilizada a relação (2), especialmente em trabalhos de Laboratório de Ensino, onde não são exigidas grandes precisões.

8 – Intervalo de confiança

O desvio padrão σ é uma medida, que permite fornecer intervalos que quantificam a qualidade das medidas, indicando qual é a probabilidade mais provável de encontrar as medidas nesse intervalo, conforme os desvios vão se afastando do ponto de valor médio. Podemos ver a quantificação do fator de confiança em relação aos intervalos limitados por valores inteiros de desvio padrão, no quadro abaixo:

Tabela II – Relação entre o intervalo da variável, o fator de confiança, e a probabilidade de encontrar a medida dentro do intervalo.

Intervalo	Fator de confiança	Probabilidade
$[-\sigma,+\sigma]$	$\alpha = 0{,}683$	68,3%
$[-2\sigma,+2\sigma]$	$\alpha = 0{,}954$	95,4%
$[-3\sigma,+3\sigma]$	$\alpha = 0{,}997$	99,7%

Assim, praticamente quase todas as flutuações aleatórias dos valores medidos se situam na faixa de $\{\bar{x} \pm 3\sigma\}$, ou seja, do fator de confiança $\alpha = 0{,}997$. Isto significa que apenas 3 dentro de 1000 medidas podem estar fora da faixa. Normalmente, é praxe rejeitar os erros que excedam esta faixa, considerando, que eles não sejam mais erros aleatórios, mas sim enganos.

Medição e propagação de erros

9 – Propagação de erros ou desvios

Na maioria dos experimentos, a medição de uma grandeza R de interesse é feita de maneira indireta, sendo esta grandeza obtida a partir de medidas de $\underline{n}$ grandezas primárias $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k, \ldots, a_n\}$. O cálculo de R é feito a partir de uma função conhecida das grandezas primárias. Estas grandezas são também denominadas *grandezas de entrada*, enquanto a grandeza R é denominada *grandeza de saída*. Um exemplo é o cálculo da densidade de um objeto (grandeza R), no qual se mede a massa e o volume do corpo. As grandezas massa e volume são chamadas grandezas de entrada. Os valores das grandezas de entrada provêm, todos ou em parte, de medições diretas. Em linguagem formal escrevemos:

$$R = R(a_1, a_2, a_3, ..., A_n) \quad (1)$$

Utilizando aproximações e um grande número de medidas (amostras), podemos admitir que o valor médio seja considerado o valor verdadeiro. Da mesma forma, a incerteza padrão pode ser considerada como o desvio padrão verdadeiro.

Fazendo um desenvolvimento matemático apropriado, temos uma expressão para o cálculo da incerteza padrão da grandeza de saída.

$$\sigma_{\overline{R}} = \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial a_1}\right)^2 \left(\sigma_{\overline{a}_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial a_2}\right)^2 \left(\sigma_{\overline{a}_2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial R}{\partial a_n}\right)\left(\sigma_{\overline{a}_n}\right)^2} \quad (2)$$

Esta expressão para a incerteza padrão da grandeza de saída, também chamada de *incerteza padrão combinada*, é utilizada quando as grandezas de entrada $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ são medidas repetidas vezes, gerando valores médios $\overline{a}_k$ e desvios padrão das médias $\sigma_{\overline{a}_k}$.

Em muitas situações não é necessário muito rigor quanto à exatidão nos valores das incertezas combinadas, sendo aceitável que sejam usadas expressões para obter valores aproximados das grandezas de interesse. Neste caso, quando é realizada apenas uma medição isolada (e não uma série de medições) devemos usar o conceito de *limite máximo de erro*.

Consideremos o caso em que se deseja calcular a incerteza padrão propagada no valor de uma grandeza de saída R, com relação funcional do tipo ***R = a + b***. São realizadas medições diretas das grandezas de entrada ***a*** e ***b**,* com suas respectivas incertezas padrão $\sigma_{\overline{a}}$ e $\sigma_{\overline{b}}$. Neste caso, as grandezas $\underline{a}$ e $\underline{b}$ são equivalentes às grandezas a_1 e a_2, contidas na equação (2), da qual se obtém:

$$\sigma_{\overline{R}} = \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial a}\right)^2 (\sigma_{\overline{a}})^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial b}\right)^2 (\sigma_{\overline{b}})^2}$$

$$\sigma_{\overline{R}} = \sqrt{(\sigma_{\overline{a}})^2 + (\sigma_{\overline{b}})^2}$$

Sendo a forma final para grandeza combinada e sua incerteza padrão combinada escrita como:

$$R \pm \sigma_{\overline{R}} = (\overline{a} + \overline{b}) \pm \sqrt{(\sigma_{\overline{a}})^2 + (\sigma_{\overline{b}})^2}$$

Na Tabela são apresentadas as expressões para o cálculo da incerteza padrão em grandezas combinadas, utilizando a propagação de erro para diversas relações funcionais.

Referências Bibliográficas

1. Domiciano, J. B., Juraltis K. R., “Introdução ao laboratório de Física Experimental”, Departamento de Física, Universidade Estadual de Londrina, 2003.
2. Vuolo, J. H. – “Fundamentos da Teoria de Erros” – Ed. Edgard Blücher , São Paulo, 1992.

Medição e propagação de erros

Tabela III - Expressões para cálculos das incertezas combinadas ou propagadas de algumas grandezas *R* que possuem formas funcionais simples.

Relação funcional	Erro propagado
$\overline{R} = R(\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n)$	$\sigma_{\overline{R}} = \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial a_1}\right)^2 \sigma_{\overline{a}_1}{}^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial a_2}\right)^2 \sigma_{\overline{a}_2}{}^2 + \cdots + \left(\frac{\partial R}{\partial a_n}\right)^2 \sigma_{\overline{a}_n}{}^2}$
$\overline{R} = \overline{a} \pm \overline{b}$	$(\sigma_{\overline{R}})^2 = (\sigma_{\overline{a}})^2 + (\sigma_{\overline{b}})^2$
$\overline{R} = \overline{a}.\overline{b}$ ou $\overline{R} = \frac{\overline{a}}{\overline{b}}$	$(\frac{\sigma_{\overline{R}}}{\overline{R}})^2 = (\frac{\sigma_{\overline{a}}}{\overline{a}})^2 + (\frac{\sigma_{\overline{b}}}{\overline{b}})^2$
$\overline{R} = \overline{a}^{\,r}$	$\frac{\sigma_{\overline{R}}}{\overline{R}} = r\frac{\sigma_{\overline{a}}}{\overline{a}}$
$\overline{R} = \ln \overline{a}$	$\sigma_{\overline{R}} = \frac{\sigma_{\overline{a}}}{\overline{a}}$
$\overline{R} = e^{\overline{a}}$	$\frac{\sigma_{\overline{R}}}{\overline{R}} = \sigma_{\overline{a}}$