RODA D´ÁGUA

MOTOR HIDRÁULICO DE GRAVIDADE

<u>Um Breve Estudo</u>

Prof. Dr. Walter Francisco Molina Jr

Dpto Eng. Biossistemas

ESALQ/USP

Piracicaba, SP

Abril de 2013

A RODA D'ÁGUA COMO MOTOR HIDRAÚLICO - EQUACIONAMENTO

1. INTRODUÇÃO

O emprego agrícola da roda d'água data de 120 A.C. e sua utilização pode ser interessante na produção de potência para diversos trabalhos, pois há possibilidade de aproveitamento de pequenas quedas com relativamente pequenas vazões de água.

A roda de alcatruzes, razão deste estudo, tem seu princípio de funcionamento baseado na diferença de nível de água e do efeito do momento causado pelo peso da água colocada nos alcatruzes. Assim, a quantidade de energia hidráulica que pode ser transformada em energia mecânica por esse tipo de equipamento é função da altura da queda, da vazão e da velocidade angular que pode ser obtida nessas condições.

Segundo Quantz (1932) as rodas d'água apresentavam baixos rendimentos, em torno de 75% e velocidades angulares de 4 a 8 rpm, resultados estes satisfatórios para motores hidráulicos, os quais devem apresentar altas velocidades angulares para que se obtenha alto rendimento e seja economicamente viáveis.

O presente estudo, visa equacionar o funcionamento de uma roda de alcatruzes para sua máxima potência.

2. CONSIDERAÇÕES GERAIS

2.1 Potência e Trabalho

O conceito de potência refere-se à relação existente entre a realização de trabalho e o tempo consumido para esse fato. Então, define-se que se um trabalho T foi realizado num tempo t,

$$\text{POTÊNCIA (P)} = \frac{T}{t}$$

Entende-se por trabalho como sendo o produto do deslocamento e da componente da força na direção do deslocamento. Portanto, uma quantidade T de trabalho realizado por uma força F, num dado deslocamento d é:

$$T = F.d$$

A pressão exercida pelo fluído é:

$$p = \frac{V.\gamma.g}{A}$$

Mas, $\frac{V}{A}$ = R, onde R é altura ou coluna do fluído.

No nosso caso, o fluído considerado é água e portanto, a potência hidráulica teórica será:

$$P_t = \gamma.g.h.Q$$

No sistema internacional de unidades:

P_T = Potência Teórica (W)

γ = Massa específica da água (kg/m^3)

g = Aceleração da gravidade (m/s^2)

h = Altura da coluna de água (m)

Q = Vazão (m^3/s)

3. O PRINCÍPIO DE FUNCIONAMENTO DOS MOTORES HIDRÁULICOS

Os motores hidráulicos têm seu princípio de funcionamento baseado na variação de energia existente num fluxo de fluído.

De acordo com o princípio da conservação da energia, conforme Ference Jr., Lemon e Stepheson (1968) o trabalho realizado sobre um objeto manifesta-se como energia potencial (gravitacional ou elástica), energia cinética ou energia térmica, ou ainda, coco uma combinação de todas elas e que, em cada instante, a soma total da energia mecânica e da energia tèrmica é constante.

Desse fato, decorre, na hidrodinâmica, o teorema de Bernoulli, que afirma ser a energia contida numa linha de corrente de fluído uma constante, proporcional à uma dimensão de comprimento e que se traduz pela soma das quantidades relativas à pressão do fluxo ($p/\gamma g$), velocidade do fluxo ($V^2/2g$) e potencial ou elevação do fluxo (h). Portanto:

$$E = \frac{p}{\gamma.g} + \frac{V^2}{2g} + h$$

onde:

E = constante (m)

p = pressão (Pa)

γ = massa específica do fluído ($kg3m^3$)

g = aceleraçao da gravidade (m/s^2)

V = velocidade (m/s)

h = elevação ou altura da coluna do fluído (m)

Consideremos agora um cilindro com pistão conforme Fig. 1, cujo curso seja d, e a área do pistão A. Na extremidade B temos um tubo ligado a uma fonte de pressão p. O pistão empurra o fluído contido no interior do cilindro de encontro à pressão, de acordo com uma força F.

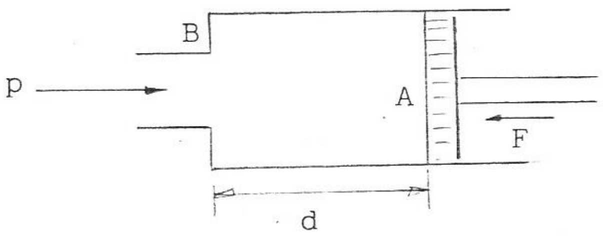


Figura 1 - Pistão hidráulico

A força F é: $F = p.A$

O trabalho T realizado é:

$$T = P.A.d$$

Como o produto da área A pelo deslocamento d é o volume de fluído (V), temos que o trabalho realizado é:

$$T = V.p$$

Dessa forma, concluímos que a potência (P) produzida por um fluído é igual a:

$$P = \frac{p.V}{t}$$

Mas, a relação entre volume e tempo é a vazão (Q). Então:

$$P = p.Q$$

A pressão estática exercida por um fluído é proporcional à seu peso (W), em determinada área (A).

$$p = \frac{W}{A}$$

O peso (W) do fluído é:

$W = m.g$ onde: m = massa do fluído (kg)
g = aceleração da gravidade (m/s^2)

Sendo massa do fluído a relação entre seu peso específico (γ) e seu volume (V) temos:

$m = V.\gamma$ onde: $V = m^3$
$\gamma = kg/m^3$

$$W = V.\gamma.g$$

3.1 A roda d'água de Alcatruzes

A energia transformada por qualquer motor hidráulico, é, portanto, de acordo com o discutido, resultado da diferença de energia existente no fluxo de água que passa por esse motor.

$$E = \left(\frac{pe}{g} + \frac{Ve^2}{2g} + he \right) - \left(\frac{ps}{g} + \frac{Vs^2}{2g} + hs \right)$$

onde os coeficientes pe, Ve e he são relativos à energia do fluxo de entrada e ps, Vs e hs à de saída.

Como a pressão (p) e a velocidade (V) não variam entre a entrada e a saída do fluxo, nesse tipo de motor, podemos dizer que a energia hidráulica transformada em energia mecânica é a diferença de potencial (h) do fluxo. Portanto:

$$E = he - hs$$

A potência mecânica produzida por um motor hidráulico do tipo roda de Alcatruzes é portanto proporcional à potência hidráulica existente num fluxo de água em relação à sua diferença de nível.

A potência mecânica (Pm) resultante do movimento rotativo é dada por:

$$Pm = T.N.K$$

onde:

- T = torque
- N = nº de revoluções por unidade de tempo ou velocidade angular
- K = constante de transformação de velocidade angular em velocidade linear.

Dessa forma, a potência mecânica teórica é igual à potência hidráulica teórica:

$$\gamma g\, h\, Q = TNK$$

Se considerarmos a instalção da roda d'água como sendo fixa, a dimensão de altura de coluna de água fica constante e portanto a potência gerada é proporcional à vazão, ou seja:

$$K_A : Q = TNK \qquad \text{onde } K_A = \gamma g . h$$

3.2 O torque

O torque produzido na roda de alcatruzes é proporcional ao peso da água existente nos alcatruzes e à distância do centro da roda onde esse peso está aplicado.

Conforme esquematizado na Fig. 2, o torque aplicado à roda produz reações na direção contrária (3ª Lei de Newton), que é proporcional à aceleração angular e ao momento de inércia do conjunto roda d'água - eixo e aos atritos existentes no sistema, os quais serão desconsiderados na presente análise.

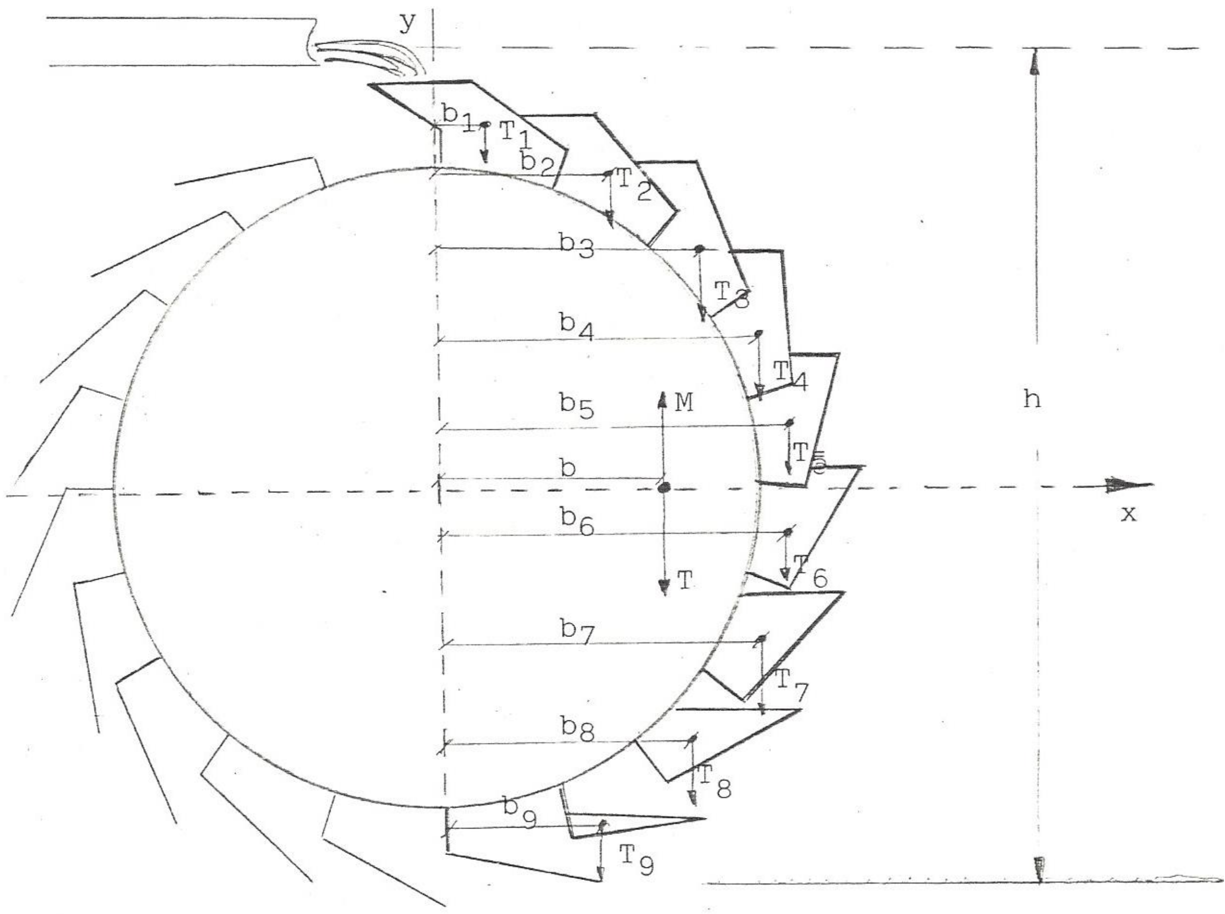


FIGURA 2 - Esquema da roda dágua.

$$T = \sum_{1}^{n} Tn$$

$$Tn = Wan.g.bn$$

onde:

T = torque

Tn = torque relativo ao peso de água no alcatruz n

Wan = massa de água no alcatruz n

bn = distância horizontal (x) do baricentro do alcatruz n

g = aceleração da gravidade

O torque é portanto a somatória dos momentos relativos a n alcatruzes com água.

$$T = Wagb$$

onde:

Wa = massa total de água contida na roda

b = distância horizontal (x) equivalente à medida ponderada das distâncias bn

Se Wa é a massa de água contida na roda, temos:

$$Wa = Va.\gamma$$

onde:

Va = volume de água contido no alcatruz

γ = massa específica da água

e,

$$Va = \sum_{1}^{n} An.l$$

onde:

An = área molhada do alcatruz n

l = largura do alcatruz

Obs.: Nesse estudo será considerado que os alcatruzes estão com volume de água igual ao seu volume máximo em cada posição de seu deslocamento angular. (Veja APÊNDICE).

A potência mecânica máxima produzida será, portanto|

$$Pm = KaQ = Va\gamma gbNK$$

3.2.1 Determinação da Área Molhada dos Alcatruzes

A área molhada dos alcatruzes ou secção transversal, pode ser determinada desde que se conheçam os pontos externos que formam o polígono dessa secção e seus ângulos em relação à um dos eixos de um sistema de coordenadas cartesianas, conforme fig. 3.

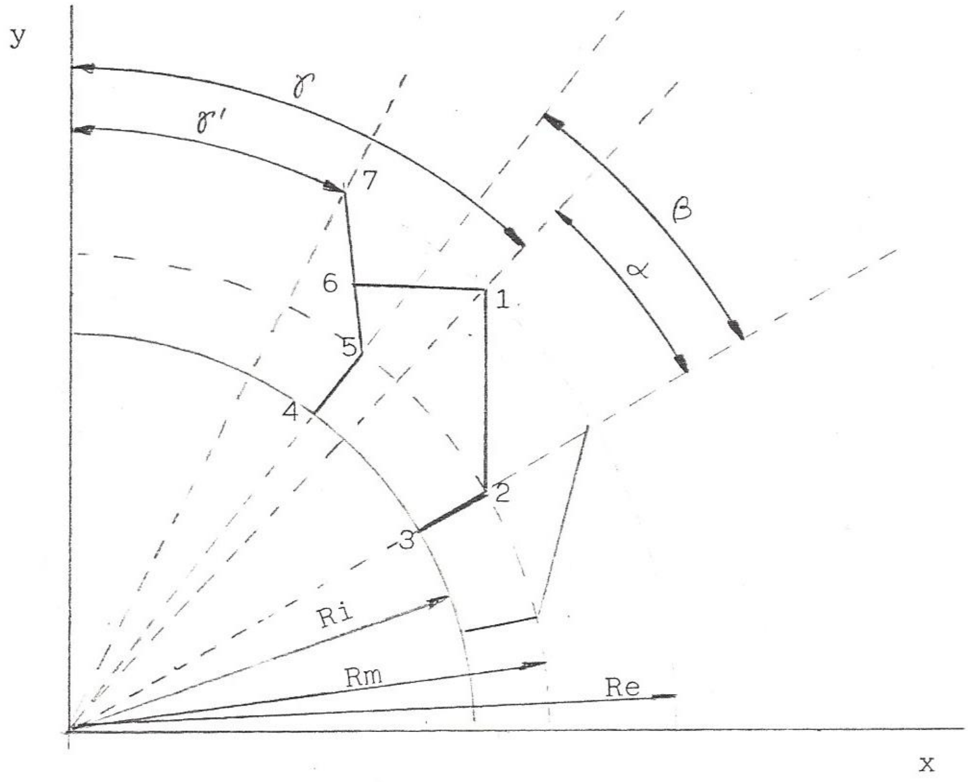


FIGURA 3 - Área molhada dos alcatruzes.

γ = ângulo da posição da boca do alcatruz

β = ângulo da abrangência do perfil de dois alcatruzes consecutivos

$\gamma' = \gamma - \beta$

α = ângulo de abrangência do alcatruz considerado

Ri = raio interno da roda

Rm = raio médio da roda

Re = raio externo da roda

1, 2, 3, 4, 5, 7 = pontos externos consecutivos do polígono formado por dois alcatruzes consecutivos

6 = ponto formado entre a linha do nível da água com a reta pertencente ao alcatruz anterior ao considerado, com a roda ou com o próprio alcatruz

Obs.: O fundo do alcatruz (linha formada pelos pontos 3 e 4) pode ser considerado como linha reta.

3.2.2 Equacionamento dos Pontos

PONTO	COORDENADA (X)	COORDENADA (Y)
1	$X_1 = Re \cdot sen\, \gamma$	$Y_1 = Re \cdot cos\, \gamma$
2	$X_2 = Rm \cdot sen\, (\gamma + \alpha)$	$Y_2 = Rm \cdot cos\, (\gamma + \alpha)$
3	$X_3 = Ri \cdot sen\, (\gamma + \alpha)$	$Y_3 = Ri \cdot cos\, (\gamma + \alpha)$
4	$X_4 = Ri \cdot sen\, (\gamma' + \alpha)$	$Y_4 = Ri \cdot cos\, (\gamma' + \alpha)$
5	$X_5 = Rm \cdot sen\, (\gamma' + \alpha)$	$Y_5 = Rm \cdot cos\, (\gamma' + \alpha)$
7	$X_7 = Re \cdot sen\, \gamma'$	$Y_7 = Re \cdot cos\, \gamma'$

As coordenadas do ponto 6 variam com o nível da água, segundo a secção transversal do alcatruz, sendo que sua componente Y_6 é sempre igual à Y_1 e, X_6 pode ser determinada de acordo com a inclinação da reta à qual pertence, e fica:

a) quando intercepta a linha formada pelos pontos 5 e 7:

$$b = \frac{Y_7 - Y_5}{X_7 - X_5} = \frac{Y_6 - Y_5}{X_6 - X_5} \quad \therefore \quad X_6 = \frac{(Y_6 - Y_5)(X_7 - X_5)}{(Y_7 - Y_5)} + X_5$$

b) quando intercepta a linha formada pelos pontos 4 e 5:

$$b = \frac{Y_5 - Y_4}{X_5 - X_4} = \frac{Y_6 - Y_4}{X_6 - X_4} \quad \therefore \quad X_6 = \frac{(Y_6 - Y_4)(X_5 - X_4)}{(Y_5 - Y_4)} + X_4$$

c) quando intercepta a linha formada pelos pontos 3 e 4:

$$b = \frac{Y_4 - Y_3}{X_4 - X_3} = \frac{Y_6 - Y_3}{X_6 - X_3} \quad \therefore \quad X_6 = \frac{(Y_6 - Y_3)(X_4 - X_3)}{(Y_4 - Y_3)} + X_3$$

d) quando intercepta a linha formada pelos pontos 2 e 3:

$$b = \frac{Y_3 - Y_2}{X_3 - X_2} = \frac{Y_6 - Y_2}{X_6 - X_2} \quad \therefore \quad X_6 = \frac{(Y_6 - Y_2)(X_3 - X_2)}{(Y_3 - Y_2)} + X_2$$

3.2.3 Cálculo da Área Molhada ou Secção Transversal dos Alcatruzes

Da geometria plana, sabe-se que qualquer polígono é decomponível em uma série de triângulos cujas áreas sabemos determinar. Dividamos portanto o polígono da secção transversal do alcatruz em triâgulos, conforme Fig. 4, obtendo um número de triângulos variando de Ø a 4 conforme o nível da água no alcatruz.

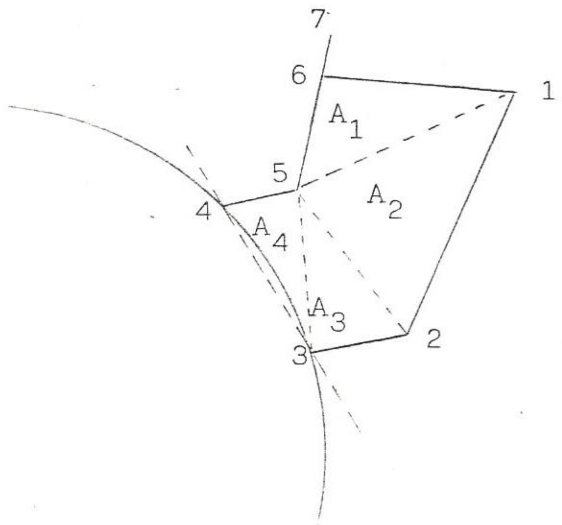


FIGURA 4 - Alcatruz decomposto em triângulos

Desta forma, a área A da secção transversal é:

$$A = \sum_{1}^{4} An$$

Da forma de cálculo das áreas conhecida como fórmula de Grauss, vem que a área de um triângulo cujos pontos formados pelos vértices têm coordenadas cartesianas conhecidas é:

Supondo um triângulo com vértices nos pontos (X_1Y_1), (X_2Y_2) e (X_3Y_3)

$$A = \frac{(X_1Y_2) + (X_2Y_3) + (X_3Y_1) - (X_1Y_3) - (X_3Y_2) - (X_2Y_1)}{2}$$

No caso da roda de alcatruzes, a área da poligonal do alcatruz pode ser então calculada desta forma, atentando-se que as coordenadas dos vértices dos triângulos e os próprios triângulos considerados mudam conforme o ângulo formado pelo alcatruz com o ângulo de referência.

3.2.4 Cálculo do Baricentro do Polígono

Conforme Fonseca (1972), a determinação de um polígono qualquer, dividido em triângulos, de áreas conhecidas é o ponto de coordenadas X e Y tal que:

$$X_p = \frac{\sum_{1}^{3} AnXn}{\sum_{1}^{3} An} \qquad Y_p = \frac{\sum_{1}^{3} AnYn}{\sum_{1}^{3} An}$$

onde:

An = área do triângulo n

Xn = cota X do baricentro do triângulo n = $\frac{X_1 + X_2 + X_3}{3}$

Yn = cota Y do baricentro do triângulo n = $\frac{Y_1 + Y_2 + Y_3}{3}$

Calculados portanto os baricentros e como a largura dos alcatruzes é constante, podemos assumir que o momento atuante (Tn) é aplicado segundo a força peso da água ($Wa_n g$) a uma distância horizontal (bn), que é correspondente à distância Xn do baricentro, para cada alcatruz.

3.3 Cálculo das Velocidades

Considerando a roda d'água em equilíbrio dinâmico, da figura 1 temos que:

$T = M$ mas,

$T = Wagb \qquad M = I\alpha$

onde:

I = momento de inércia do sistema roda-eixo

α = aceleração angular do sistema

Considerando desprezível o momento de inércia dos suportes da roda (raios), pois sua massa é pequena em relação à massa total, o momento de inércia do sistema é a somatória dos momentos de inércia da roda e do eixo.

Conhecida a massa da roda d'água e a massa específica do material de que é construída, podemos reduzí-la à forma de um anel cilíndrico de expessura conhecida.

Sendo volume V a relação entre massa m da roda e massa específica do material e conhecidos o raio interno da roda (R) e a largura (L), temos que a espessura é:

$$E = \frac{V}{2\pi RL}$$

sendo portanto:

$$E = Rr_a - Ri_a$$

onde:

Ri_a = raio interno do anel cilíndrico (ou da roda)

Rr_a = raio externo do anel cilíndrico (Ri_a + E)

Assim, o momento de inércia do anel cilíndrico considerado de massa contínua é:

a) para espessura desprezível:

$$IA = \frac{MAR^2 a}{2}$$

b) para espessura não desprezível:

$$IA = \frac{1}{2} MA(R^2 i_a + R^2 e_a)$$

onde, para os casos a e b temos:

IA = momento de inércia
MA = massa do anel cilíndrico
Ra = Ri_a = raio do anel cilíndrico
Ri_a = raio interno do anel cilíndrico (ou da roda)
Re_a = raio externo do anel cilíndrico (Ri_a + E)

Com relação ao eixo, o momento de inércia é:

$$IE = \frac{ME.R^2 E}{2}$$

onde:

IE = momento de inércia do eixo
ME = massa do eixo
RE = raio do eixo

Obs.: Momentos de inércia segundo Ference Jr. e outros.

Em equilíbrio dinâmico temos para a roda, que:

$T = M$ e, $Wagb = (IA + IE)\alpha$

Portanto, sendo a aceleração angular, que corresponde à componente radial da aceleraçao da gravidade, temos que:

$$\alpha = \frac{Wagb}{IA + IE}$$

Considerando que a velocidade angular (W) da roda no instante (t) é dada pela relação:

$$W = W_o + \alpha t,$$

E que W_o é a velocidade angular inicial, chegamos à relação de velocidade linear (v) que é:

$$v = WR$$

Sendo R o braço (b) de aplicação da força, fica sendo v a velocidade linear da roda.

$$v = Wb$$

Do ítem 3.1, temos que a potênçia mecânica é:

$$Rm = TNK$$

onde:

K = constante de transformação de velocidade angular em velocidade linear

Portanto:

$NK = Wb$ e, $Pm = TWb$

$P = V\gamma gb.Wb$ e, $P = V.\gamma gb.V$

Sendo as potências teóricas mecânica e hidráulica, equivalentes,

$Pm = PT$ e, para uma altura fixa numa coluna de água para a roda,

$PT = K_A Q$, temos:

$$K_A Q = TWb \quad \text{ou} \quad Q = \frac{TWb}{K_A}$$

4. RENDIMENTO

Vários fatores concorrem para que a potência efetiva, que é a que realmente observa-se quando do uso dos motores hidráulicos sejam menores de que a potência teórica (máxima).

Alguns deles, conforme Mialhe, podem ser citados como sendo, atrito, turbilhonamneto e não preenchimento completo dos alcatruzes.

O rendimento desse tipo de motor hidráulico, segundo Quantz, não ultrapassa 75%, sendo considerado baixo.

O máximo de potência efetiva que pode ser fornecida por uma roda de alcatruzes é, portanto|

$$PE = Pm.\eta \qquad \text{ou} \qquad PE = TWb.\eta$$

onde:

η = rendimento

5. BIBLIOGRAFIA

FERENCE Jr, M.; Lemon, H.B; STEPHENSON, R.J. Curso de Física - 1968 Ed. Edgar Blücher Ltda. 341 pág.

FONSECA, A. Curso de Mecânica. Vol. IV. 1960. Ed. Ao Livro Técnico S.A. 448 p.

SEARS, F.W. Física I. Vol 1 - 1966. Ed. Ao Livro Técnico S.A. 667 p.

SCHAUN, D.; VAN DER MERWER, C.W. Física Geral. 1961. Ed. Mac Graw Hill do Brasil Ltda. 430 p.

QUANTZ, L. Motores Hidráulicos 1932. Ed. Gustavo Gili. Barcelona 247

FONSECA, A. Curso de Mecânica. Vol. I. 1972. Ed. Ao Livro Técnico. 463 p.

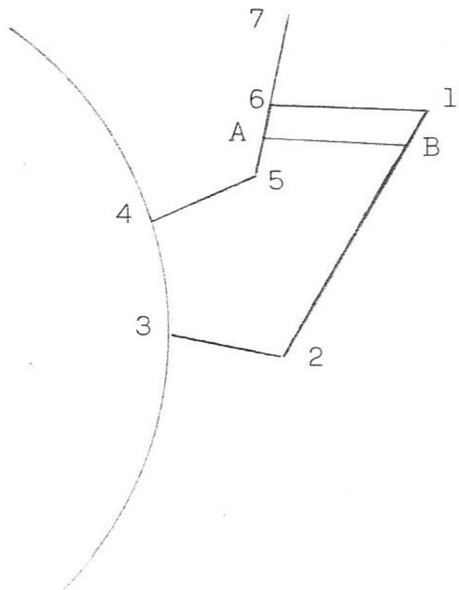
MIALHE, L.G. Máquinas Motoras na Agricultura. 1980. EDUSP 283 p.

Apontamentos de aula.

APÊNDICE

Sendo a quantidade de água contida em cada alcatruz menor que o volume máximo admissível, a forma de cálculo da potência permanece, mudando somente a forma de determinação das coordenadas dos pontos de vértice da poligonal, em relação ao nível da água.

Considerando na figura abaixo a linha $\overline{AB}$ como representação do nível de água, a determinação das coordenadas (X_A, Y_A) e (X_B, Y_B) é dad da seguinte forma:



Inclinaçao da reta $\overline{1B2}$ $$b = \frac{Y_1 - Y_2}{X_1 - X_2} = \frac{Y_B - Y_2}{X_B - X_2}$$

Inclinaçao da reta $\overline{7A5}$ $$b = \frac{Y_7 - Y_5}{X_7 - X_5} = \frac{Y_A - Y_5}{X_A - X_5}$$

Considerando a relação entre a área da poligonal (A_t) e a área molhada ou área efetiva (A_e) temos:

$\frac{A_t}{A_e} = K$, sendo K a porcentagem do alcatruz considerando, ocupado pela água.

A área sem água (A_t - A_e) pode ser dividida em dois triângulos sendo:

T_1 = formado pelos pontos $(X_1,Y_1);(X_6,Y_6);(X_A,Y_A)$ e

T_2 = formado pelos pontos $(X_1,Y_1);(X_A,Y_A);(X_B,Y_B)$

As coordenadas Y são iguais para os dois casos, sendo:

$Y_1 = Y_6$ e $Y_A = Y_B$

As áreas dos triângulos são:

$$A_1 = \frac{(X_1Y_6) + (X_6Y_A) + (X_AY_1) - (X_1Y_A) - (X_AY_6) - (X_6Y_1)}{2}$$

$$A_2 = \frac{(X_1Y_A) + (X_AY_B) + (X_BY_1) - (X_1Y_B) - (X_BY_A) - (X_AY_1)}{2}$$

De acordo com a inclinação das retas, X_A e X_B são:

$$X_A = \frac{(Y_A - Y_5)(X_7 - X_5)}{(Y_7 - Y_5)} + X_5$$

$$X_B = \frac{(Y_B - Y_2)(X_1 - X_2)}{(Y_1 - Y_2)} + X_2$$

Mas como $A_1 + A_2 = (1 - K)A_t$, e substituindo-se Y_B por Y_A em X_B e substituindo-se X_A e X_B na fórmula do cálculo das áreas A_1 e A_2, determina-se Y_A para um dado K.

Com Y_A determina-se as coordenadas Y_B, X_A e X_B e procede-se o cálculo normalmente.