UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA SUPERIOR DE AGRICULTURA “LUIZ DE QUEIROZ”
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE BIOSSISTEMAS

LEB340 TOPOGRAFIA E GEOPROCESSAMENTO I

PROF. DR. CARLOS ALBERTO VETTORAZZI

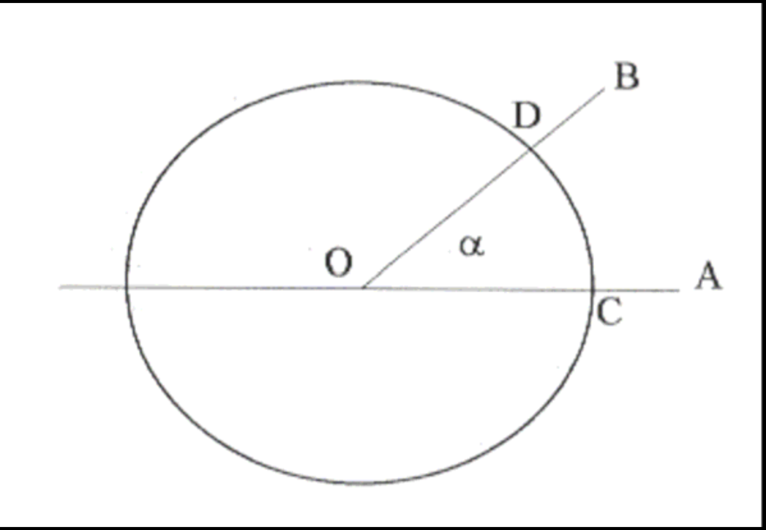
REVISÃO DE TRIGONOMETRIA E GEOMETRIA ANALÍTICA

1. TRIGONOMETRIA: TÓPICOS DE INTERESSE À TOPOGRAFIA

1.1. MEDIÇÃO DE ÂNGULOS

1.1.1. MEDIÇÃO SEXAGESIMAL

α é o ângulo formado pela rotação de uma semi-reta em torno de um ponto fixo (o vértice do ângulo)



Dividindo-se a rotação completa em 360 partes iguais, teremos 360 ângulos iguais, cada um deles denominado de grau e denotado 1°.

Cada grau é dividido em 60 minutos (60’).

Cada minuto é dividido em 60 segundos (60”).

O círculo é dividido em quatro (4) partes iguais chamadas quadrantes, cada um formando um ângulo reto (90°).

1.1.2. Medição Centesimal

Para tornar o sistema de medida de ângulos coerente com outras medidas métricas, decidiu-se dividir o ângulo reto em 100 partes iguais e, consequentemente, o círculo inteiro em 400 partes.

Os ângulos assim obtidos foram chamados de grados (grd).

1 ângulo reto = 100 grados

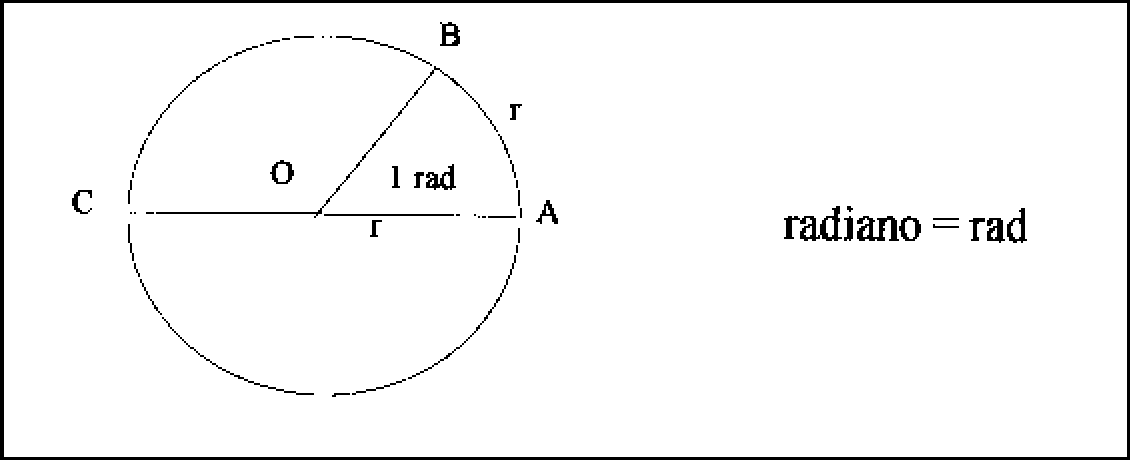
1 grado = 100 minutos

1 minuto = 100 segundos

1.1.3. Medição circular

É um método absoluto, pois independe da divisão de um ângulo reto em qualquer número arbitrário de partes, 90 ou 100.

A unidade é obtida da seguinte maneira: em um círculo de centro O, façamos com que um raio OA gire para a posição OB, de forma que o comprimento do arco AB seja igual ao comprimento do raio.



Fazendo-se isso, forma-se o ângulo AÔB, cuja unidade de medida é chamada radiano. O tamanho do ângulo será o mesmo, qualquer que seja o raio tomado. Sua magnitude é absoluta.

Convertendo-se ao sistema sexagesimal, temos que 1 radiano é aproximadamente igual a 57° 17’ 44,8”.

TEOREMA: “A razão entre a circunferência de um círculo e seu diâmetro é fixa para todos os círculos”

Circunferência/diâmetro = constante = π = aprox. 3,1416

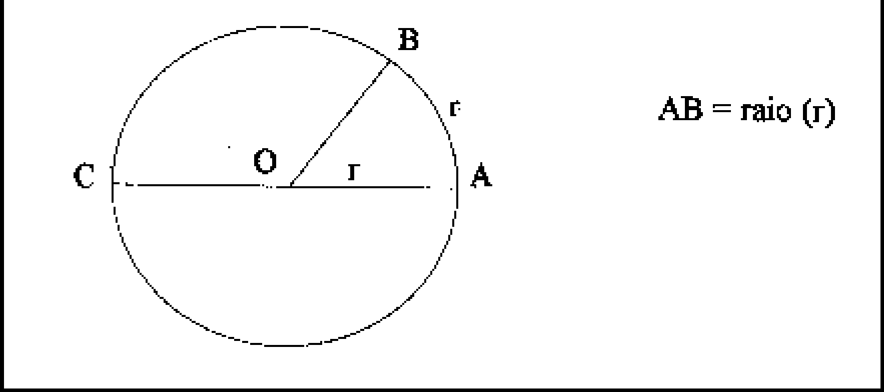
Portanto: circunferência = π . Diâmetro

Ou: $c = 2 \pi r$

“Um radiano é o ângulo subtendido ao centro de um círculo por um arco de comprimento igual ao seu raio”

Circunferência = π . Diâmetro

Arco semicircular = π . Raio



O arco do semicírculo ABC subtende dois ângulos retos e o arco AB subtende 1 radiano. Como o arco do semicírculo é π vezes o arco AB, o ângulo subtendido pelo arco de semicírculo é π .vezes o ângulo subtendido pelo arco AB ("Os ângulos ao centro de um círculo são proporcionais aos arcos pelos quais são subtendidos").

Isto é:

Dois ângulos retos = π rad

$180° = \pi$ rad

Portanto: 1 rad = $180° / \pi$ = aprox. 57° 17’ 45”

OBS: Conversão de graus em radianos

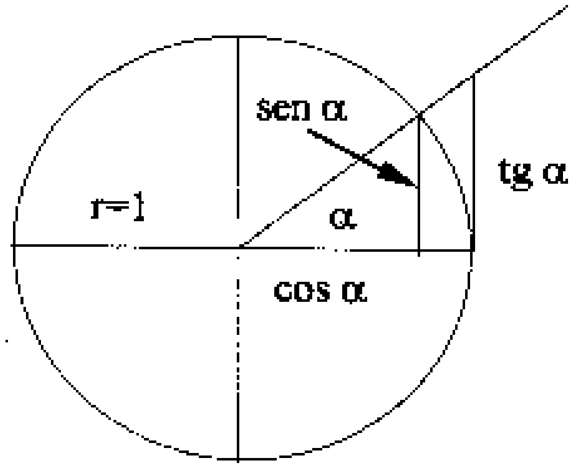
$180° = \pi$ rad

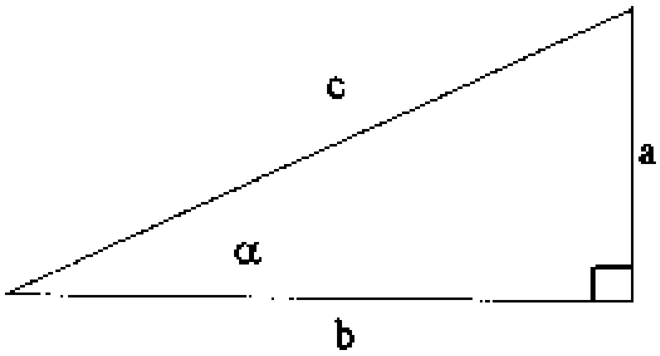
Portanto: $1° = \pi / 180$ rad

e

$\theta° = (\theta \,.\, \pi / 180)$ rad

1.2. AS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS





$\text{sen}\ \alpha = a/c$

$\cos \alpha = b/c$

$\text{tg}\ \alpha = a/b$

$\text{cosec}\ \alpha = 1/\text{sen}\ \alpha$

$\sec \alpha = 1/\cos \alpha$

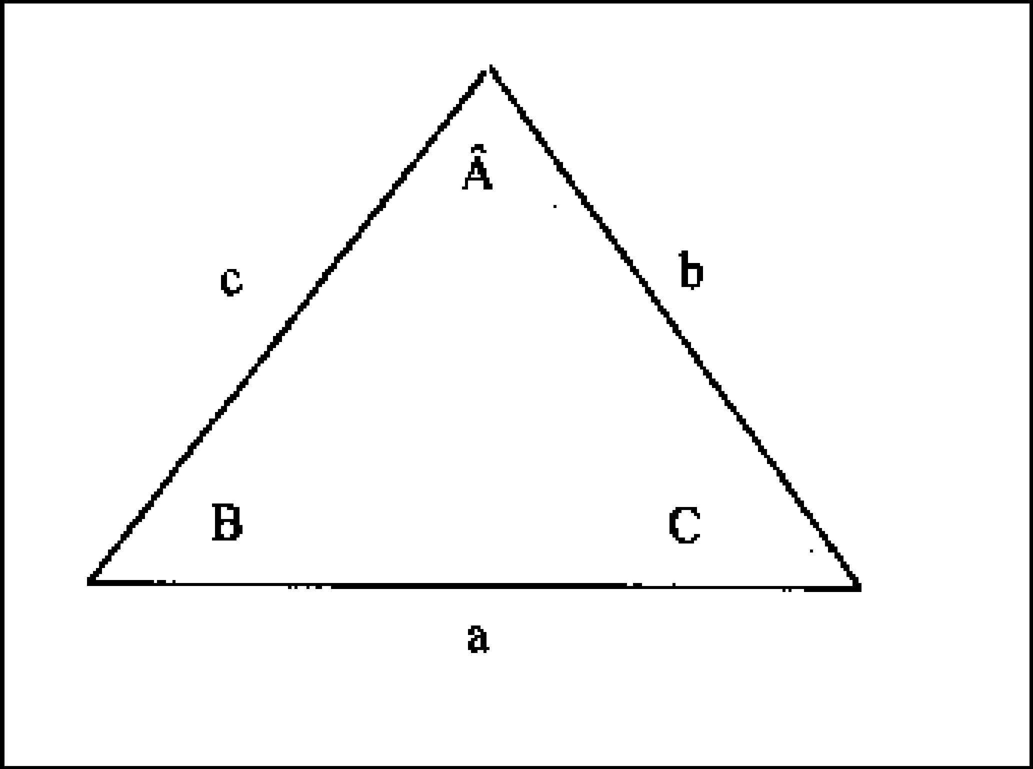
$\text{cotg}\ \alpha = 1/\text{tg}\ \alpha$

EXEMPLO DE APLICAÇÃO

Em um ponto (O), distante horizontalmente 160 m da base de uma torre, o ângulo de elevação (α) para o topo da torre é 40° 20'.

Determinar a altura da torre, em relação ao nível do solo.

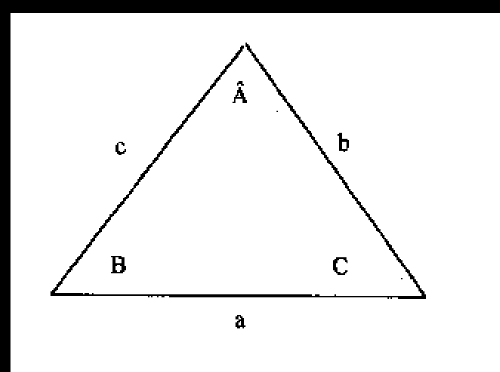
1.3. RELAÇÕES ENTRE LADOS E ÂNGULOS DE UM TRIÂNGULO



1.3.1. Lei dos Senos

"Em qualquer triângulo, os lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos"

$$\frac{senA}{a}=\frac{senB}{b}=\frac{senC}{c}$$



1.3.2. Lei dos Cossenos

Determinação dos ângulos de um triângulo quando todos os seus lados são conhecidos

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Determinação do terceiro lado de um triângulo, quando dois lados e o ângulo contido por eles forem conhecidos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$$

1.3.3. Seno de um ângulo de um triângulo em termos dos lados

$$sen A = \frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Em que:

$$s = \text{semi-perímetro} = \frac{a+b+c}{2}$$

1.4. RESOLUÇÃO DE TRIÂNGULOS

Um triângulo pode ser resolvido quando são dados os seguintes elementos:

Caso 1: três lados

Caso 2: dois ângulos e um lado

Caso 3: dois lados e o ângulo formado por eles

Caso 4: dois lados e um ângulo oposto a um deles

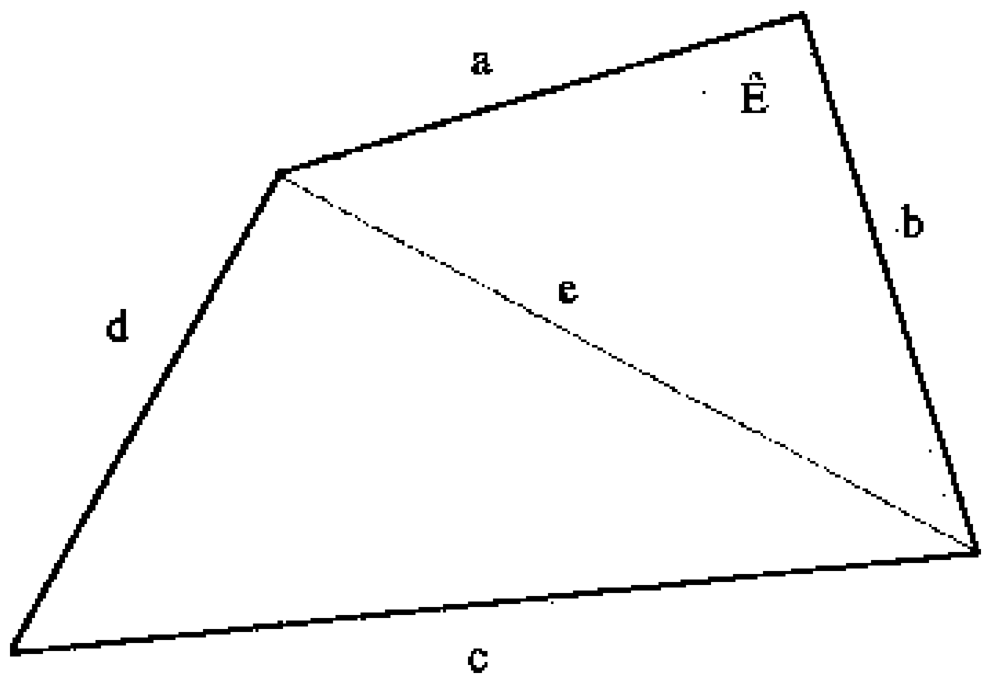
Os três primeiros casos são os mais importantes para a Topografia, portanto iremos tratar apenas deles.

1.4.1. Caso 1: Resolução de um triângulo quando os três lados são conhecidos

Resolução por meio da Lei dos Cossenos

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$ e similarmente, cos B e cos C.

Exemplo de aplicação: Levantamento à trena



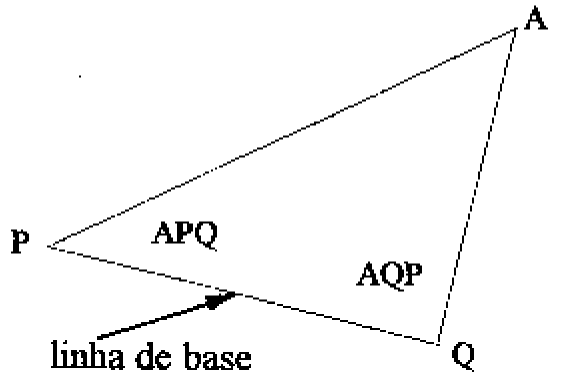
$$\cos E = \frac{a^2 + b^2 - e^2}{2ab}$$

1.4.2. Caso 2: Dados dois ângulos e um dos lados do triângulo

Resolução por meio da Lei dos Senos

Obs.: Se dois ângulos são conhecidos o terceiro também o será, já que a soma dos ângulos internos de um triângulo deve ser 180°.

Exemplo de aplicação: Determinação da distância a um objeto, ou ponto no terreno, inacessível ou de difícil acesso.



AP = ?

Demarca-se a linha PQ;
Em P : mede-se APQ
Em Q : mede-se AQP

Assim, no triângulo APQ : PQ é conhecido
APQ e AQP são conhecidos

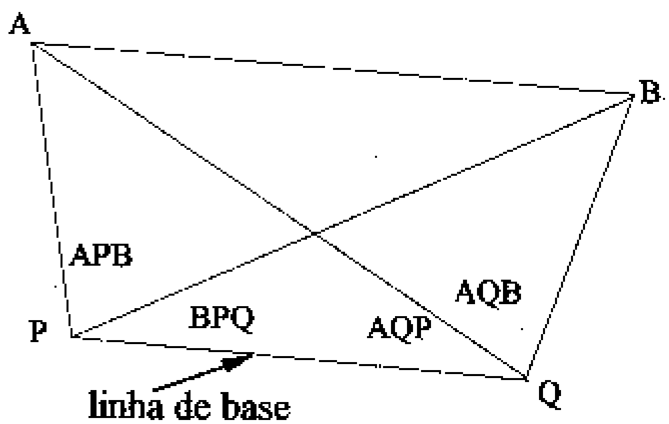
Logo:

$$\frac{PQ}{sen[180^0 - (APQ + AQP)]} = \frac{AP}{sen AQP}$$

1.4.3. Caso 3: Dados dois lados e o ângulo formado por eles

Resolução por meio da Lei dos Senos e da Lei dos Cossenos.

Exemplo de aplicação: Determinação da distância entre dois pontos visíveis, mas inacessíveis.



AB = ?

No triângulo APQ : PQ é conhecido

APQ (APB + BPQ) e AQP são conhecidos

Pela Lei dos Senos: $$\frac{PQ}{sen[180^0 - (APQ + AQP)]} = \frac{AQ}{senAPQ}$$

$\therefore$ AQ é determinado.

Analogamente o triângulo BPQ pode ser resolvido e QB determinado. Então, no triângulo AQB:

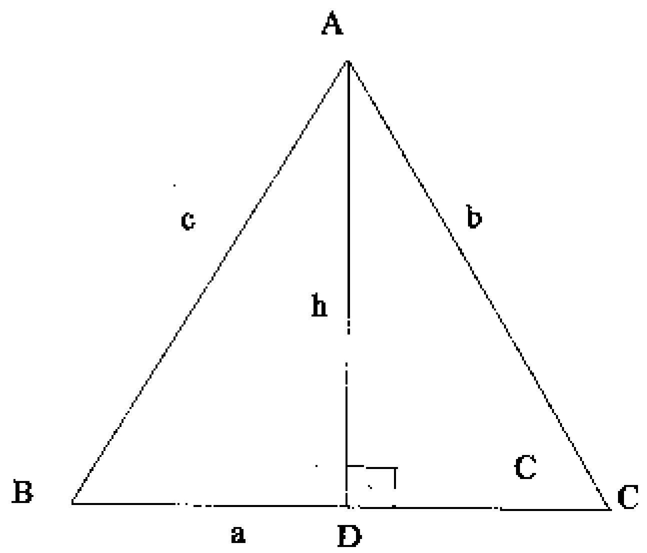
AQ é conhecido
QB é conhecido
AQB é conhecido

Portanto, o lado AB, no triângulo AQB, pode ser determinado agora pela Lei dos Cossenos:

$$AB^2 = AQ^2 + QB^2 - 2.AQ.QB.\cos AQB$$

1.5. ÁREA DE UM TRIÂNGULO

1.5.1. Fórmula da base e da altura (da geometria elementar)



Sejam AD = h e
Δ = área do triângulo ABC

$\Delta = 1/2\ BC\ .\ AD$
ou
$\Delta = 1/2\ a.h$

Normalmente, na Topografia, h não é medido diretamente no campo, daí a conveniência de se empregarem outros métodos no cálculo da área do triângulo, como será visto a seguir.

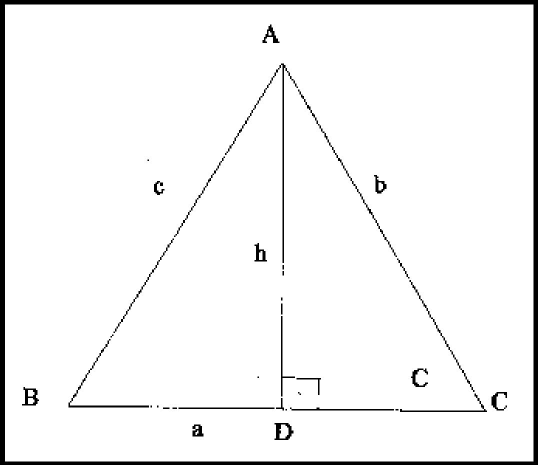
1.5.2. Fórmula do seno

Pela observação da figura:

AD / AC = sen C

ou

h / b = sen C



Portanto, h = b sen C

Substituindo-se h na fórmula da geometria elementar:

$$\Delta = 1/2\ a.h \qquad \therefore\ \Delta = 1/2\ a.b.\text{sen}\ C$$

Analogamente podem ser utilizados os outros lados como bases.

Logo:

"A área de um triângulo é igual à metade do produto de dois lados e do seno do ângulo contido por eles."

1.5.3. Área em termos dos lados do triângulo

$$senA = \frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Substituindo-se em : $\Delta = 1/2\ b.c.sen\ \hat{A}$

$$\Delta = \frac{1}{2}bc\frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, que é a Fórmula de Héron, ou do Semi-perímetro.

EXERCÍCIOS

1. Dois lados adjacentes de um retângulo têm 15,8 cm e 11,9 cm. Determine os ângulos que a diagonal do retângulo faz com ambos os lados.

   Resp.: 36° 59’ e 53° 01’ (aprox.)

2. Uma rampa uniforme sobe 10,5 km em um trecho de 60,0 km de comprimento (distância inclinada).

   Determine o ângulo entre a rampa e a horizontal.

   Resp.: 10° 04’ 43”

3. Em um triângulo retângulo, os lados que contêm o ângulo reto (catetos) têm 4,5 m e 5,8 m.

Determine os ângulos e o comprimento da hipotenusa.

Resp.: 37° 48' 24"; 52° 11' 36"; 7,314 m.

4. Em um triângulo de lados a, b e c:

4.1. Quando $\hat{A}$ = 54° 00'; B = 67° 00'; e a = 13,9 m, determine b e c.

Resp.: b = 15,815 m e c = 14,727 m.

4.2. Quando Â = 38° 15’; B = 29° 38’; e b = 16,2 m, determine a e c.

Resp.: a = 20,284 m e c = 30,353 m.

5. Determine os ângulos do triângulo cujos lados são: a = 8,0 m;

b = 9,0 m; e c = 12,0 m.

Resp.: Â = 41° 48’ 35’; B = 48° 35’ 20”; C = 89° 36’ 07”

6. Em um triângulo: Â = 75° 12’; b = 43,0 m; e c = 35,0 m.

Determine os ângulos B e C.

Resp.: B = 59° 59’ e C = 44° 49’ (aprox.)

7. Determine a área de um triângulo quando a = 6.2m; b = 7,8 m e C = 52° 00’.

Resp.: 19,054 m^2.

8. Determine a área de um triângulo cujos lados têm: 325,0m; 256,0m; e 189,0m.

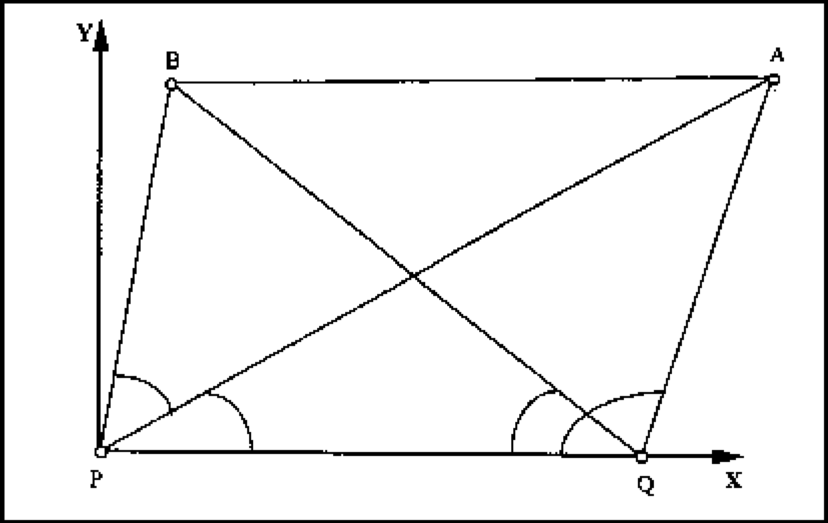
Resp.: 24.167,342 m^2 = 2,417 ha = 0,999 alq. Paul. (Obs.: 1 alqueire paulista = 24.200 m^2.

9. Em um levantamento topográfico, conforme croqui a seguir, foram obtidos os seguintes valores:

a) PQ = 200,0m (linha de base);

b) A partir do ponto P: BPA = 40° 58’; APQ = 38° 40’

c) A partir do ponto Q: BQP = 29° 30’; AQP = 108° 20’

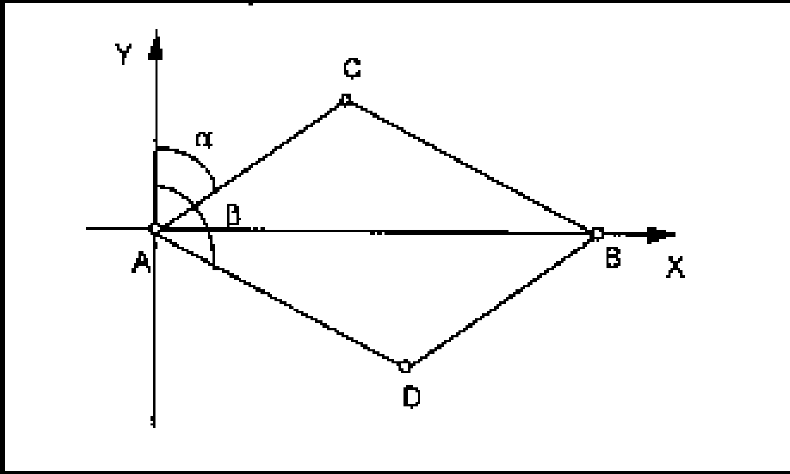


Determinar o comprimento de AB.

Resp.: 278,383 m.

10. Um terreno em forma de paralelogramo foi levantado conforme croqui a seguir, obtendo-se os seguintes dados:

a) AB = 60,0m; b) α = 60° 30’ 15”; e β = 129° 25’ 20”.



Determinar:

1) O perímetro do polígono.

Resp.: 144,991 m.

2) A área do polígono ACBD, pelo método de Herón

Resp.: 1206,330 m^2.

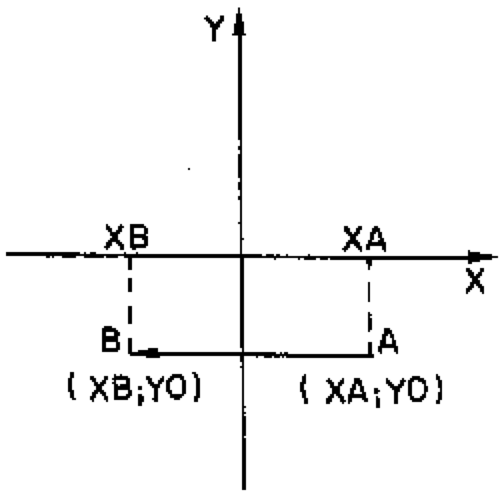
2. TÓPICOS DE GEOMETRIA ANALÍTICA

- Geometria analítica refere-se ao estudo de figuras geométricas usando princípios algébricos.

- O gráfico de RxR é chamado de plano de coordenadas cartesianas. Graficamente, ele consiste de um par de linhas perpendiculares chamada de eixos de coordenadas, e o plano onde eles estão. O eixo vertical é o eixo Y (eixo das ordenadas) e o eixo horizontal é o eixo X (eixo das abscissas). O ponto de interseção destes dois eixos é chamado de origem. O plano é dividido em 4 regiões pelo plano de coordenadas. Estas regiões são numeradas de I até IV começando na região onde os valores de X e Y são positivos e então seguindo o sentido anti-horário.

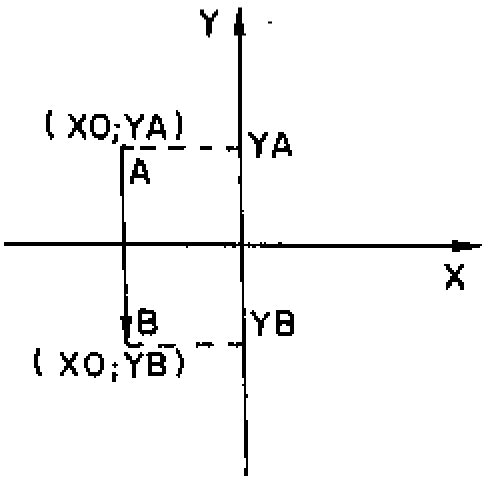
- A distância de um segmento de reta horizontal é a coordenada X do segundo ponto menos a coordenada X do primeiro

$$\boxed{d = X_B - X_A}$$



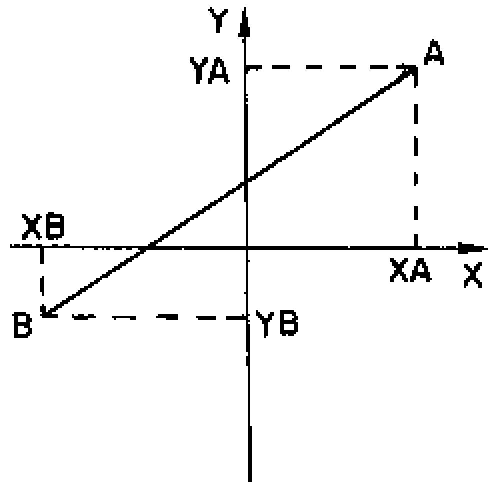
- A distância de um segmento de reta vertical é a coordenada Y do segundo ponto menos a coordenada Y do primeiro

$$\boxed{d = Y_B - Y_A}$$



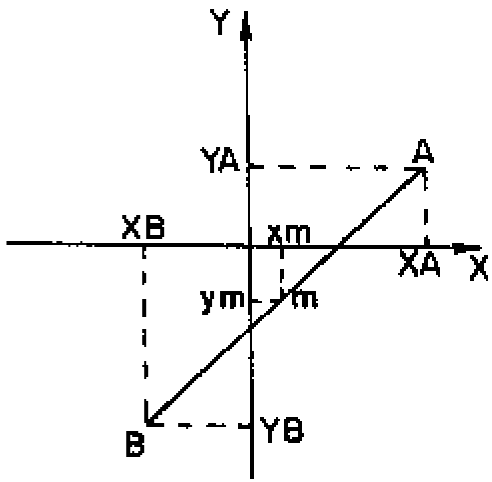
- *Teorema 1*: para dois pontos quaisquer A e B com coordenadas $(X_A; Y_A)$ e $(X_B; Y_B)$ respectivamente, a distância entre A e B é:

$$\boxed{d = \sqrt{(X_A - X_B)^2 + (Y_A - Y_B)^2}}$$



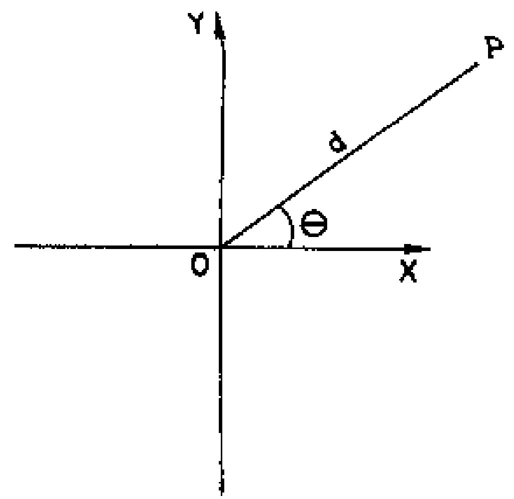
- *Teorema 2*: dado o segmento de reta com extremidades (X_A; Y_A) e (X_B; Y_B), as coordenadas do ponto médio do segmento de reta são (X_m; Y_m) onde:

$$\boxed{X_m = \frac{X_A+X_B}{2}; \qquad Y_m = \frac{Y_A+Y_B}{2}}$$



3. COORDENADAS POLARES

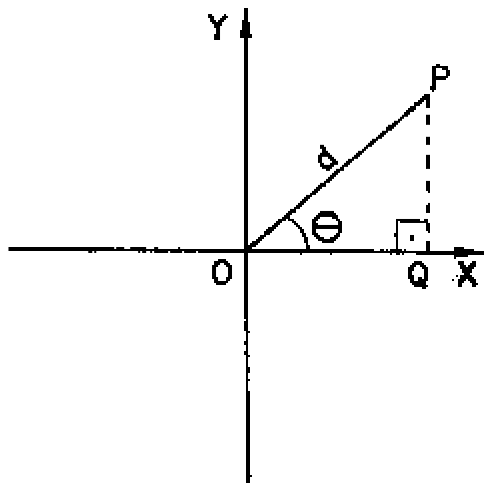
- Um ponto pode ser caracterizado pelas suas coordenadas cartesianas (como já visto) ou pelas suas coordenadas polares, ou seja, dado um sistema de 2 eixos perpendiculares, concorrentes em O (ponto polar) um onto P qualquer pode ser caracterizado pela distância OP e pelo ângulo que esse segmento de reta faz com o eixo X.



3.1. Transformação de coordenadas polares em cartesianas

$$\text{sen}\,\theta = PQ / OP \implies \text{sen}\,\theta = y / d \implies y = d \times \text{sen}\,\theta$$

$$\cos\theta = OQ / OP \implies \cos\theta = x / d \implies x = d \times \cos\theta$$



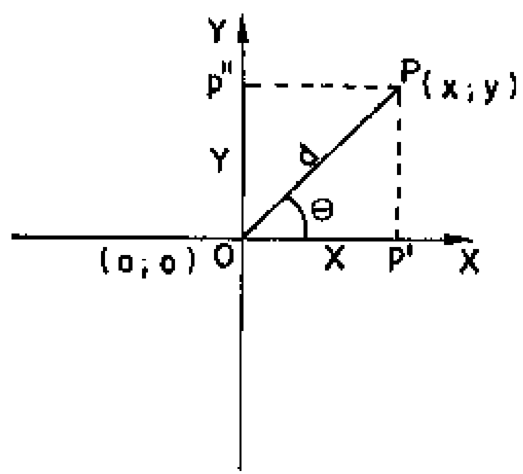
3.2. Transformação de coordenadas cartesianas em polares

- Pelo Teorema de Pitágoras calculamos d:

$$\boxed{d = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

- Pelo arco tangente calculamos θ:

$$\boxed{tg\,\theta = y / x \implies arco\ tg\,(x / y) = \theta}$$



4. CÁLCULO DE ÁREA PELO MÉTODO DAS COORDENADAS (GAUSS)

Seja uma polígonal fechada de vértices 1 (x1, y1); 2 (x2; y2); ...

n (xn, yn) e S a área dessa poligonal:

$$2S = \left| \begin{array}{cccccc} \underline{X_1} & \underline{X_2} & \underline{X_3} \ldots\ldots & \underline{X_{n-1}} & \underline{X_n} & \underline{X_1} \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 & Y_{n-1} & Y_n & Y_1 \end{array} \right| \quad \overset{+}{\underset{-}{\searrow}} \qquad \overset{-}{\underset{+}{\swarrow}}$$

EXERCÍCIOS

1) Represente graficamente, no plano cartesiano, o polígono cujas coordenadas dos vértices são:

A (-3; 2)	D (5; 0)
B (1; 3)	E (2;-3)
C (3; 5)	F (0;-2)

****OBS:** a) unidade de medida linear = metro; b) empregar escala 1:100

2) Calcular, pelo método das coordenadas (GAUSS), a área do polígono a que se refere o exercício anterior. **R:** A = 32,5 m^2

3) Ainda com relação ao mesmo polígono, unindo-se através de uma linha os vértices A e D, qual o valor do ângulo agudo (α) formado entre AD e o eixo das abscissas? Qual o comprimento de AD?
R: α = 14°02'10"; AD = 8,246 m

4) As coordenadas polares dos vértices de um triângulo são:

A (4,243m; 45°00'00")
B (7,616m; 23°11'55")
C (5,000m; 00°00'00")

Calcular as respectivas coordenadas retangulares (ou cartesianas)

R: A (3,000m; 3,000m); B (7,000m; 3,000m); C (5,000m; 0,000m)